SOLUCIÓ

TAREA PARA LA PC 04_MATEMÁTICA 03__25-1

Saucedo Batallanos Marlon Nilo---2023155**2**C__

Último dígito es el 2

Ejercicio 2

Una empresa constructora dispone de 10800000 € *para edificar en una urbanización casas de dos tipos: las de tipo A, cada una de las cuales tendría un coste (para la empresa) de* 180000 €, *y dejaría al venderla, un beneficioo de* 24000 €; *y las de tipo B cuyos costes y beneficios individuales serían de* 120000 € *y* 18000 € *respectivamente. Si las normas municipales no permiten construir más de* 80 *casas, hallar cuántas de cada tipo debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio.*

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Nº de casas del tipo } A\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de casas del tipo } B\text{”}$$

- `Restricciones`: Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

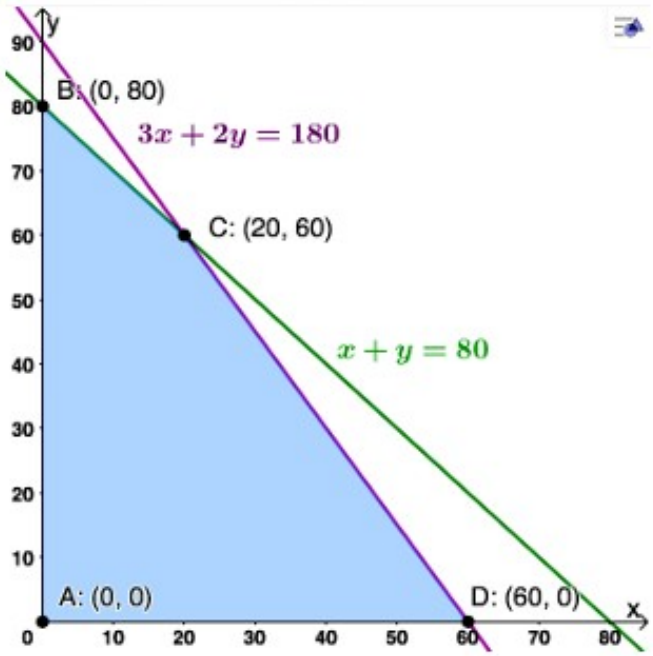
$$\begin{cases} ① \ 180000x + 120000y \leq 10800000 \\ ② \ x + y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \ 3x + 2y \leq 180 & \to (0, 90) \ \& \ (60, 0) \\ ② \ x + y \leq 80 & \to (0, 80) \ \& \ (80, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 24000x + 18000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	80	1440000
C	20	60	1560000
D	60	0	1440000



Por tanto el *máximo beneficio* es de 1560000 y se obtiene vendiendo 20 casas del tipo A y 60 del tipo B.

HTTPS://APRENDECONMIGOFREE.COM

SOLUCIÓ

Analizamos si **alguno de los puntos A,B,C,D** cumple las **condiciones del teorema de KKT** o del **método de Lagrange**, usando lo que se muestra en el problema.

- El **teorema de KKT aplica** (porque KKT generaliza la optimización con restricciones, y en el caso lineal coincide con los métodos clásicos).
- **El método de Lagrange no aplica directamente**, porque es adecuado para restricciones de **igualdad**, y aquí tenemos **desigualdades**.

Condiciones KKT en este problema

Dado que el problema es $Maximizar\ f(x,y) = 24000x + 18000y$

Sujeto a:

1. $180000x + 120000y \leq 10800000$ (o en forma simplificada: $3x + 2y \leq 180$)
2. $x + y \leq 80$
3. $x \geq 0, y \geq 0$

Podemos usar KKT porque:

 La función objetivo es **lineal (convexa)**.

 Las restricciones son **lineales** (lo que implica que son convexas también).

 Se cumple una **condición de regularidad** (región factible con vértices y restricciones linealmente independientes).

¿Qué punto cumple KKT?

Según la tabla y el gráfico, el máximo beneficio se da en:

Punto C = (20, 60)

Evaluamos las condiciones KKT en ese punto:

En el punto **C =** $(20,60)$, observamos que:

$$3(20) + 2(60) = 60 + 120 = 180 \rightarrow \textbf{activa}$$

SOLUCIÓ

$$20+60=80 \rightarrow \textbf{activa}$$

$$x=20>0, y=60>0 \rightarrow \quad \textit{no están activas las restricciones } x\geq 0, y\geq 0$$

Entonces, en el punto C, hay **2 restricciones activas**, por lo tanto, es candidato a cumplir las condiciones KKT.

En conclusión, en el **punto C sí cumple las condiciones KKT**, porque:

- Es un vértice de la región factible.
- La región factible es convexa.
- Las restricciones activas en ese punto son lineales e independientes.
- La función objetivo es lineal (y por tanto, convexa).
- El punto es **óptimo** (produce el beneficio máximo).

Los puntos A, B y D **no son el óptimo**, por lo tanto **no cumplen completamente** las condiciones KKT para **óptimo global**, aunque algunos pueden ser **extremos factibles** (esquinas) que cumplen algunas condiciones.

Ejercicio 12 (2,5 *puntos*)

a) *(1 punto) Una frutería vende dos tipos de surtidos de frutos rojos, A y B El surtido de tipo A contiene 75 g de arándanos, 100 g de frambuesas y se vende a 2,40 euros, mientras que el de tipo B contiene 75 g de arándanos, 50 g de frambuesas y se vende a 1,80 euros. La frutería dispone de un total de 3,75 kg de arándanos y 4 kg de frambuesas y el número de surtidos que vende del tipo A, siempre es menor o igual al doble de los del tipo B.*
Formule, sin resolver, el problema que permite obtener el número de surtidos de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea máximo.

b) *(1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:*

$$x + 4y \geq 5 \qquad \& \qquad x + 2y \geq 4 \qquad \& \qquad 7x + 5y \leq 35 \qquad \& \qquad x \geq 0$$

¿En qué punto de la región anterior la función $F(x, y) = 2x+y$ alcanza el mínimo y cuál es dicho valor?.

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Bloque A - Reserva)

HTTPS://APRENDEMATEMATICAS.COM

Solución.

	Surtido tipo A	Surtido tipo B	Existencias
Contenido de arándanos (g)	75	75	3750
Contenido de frambuesas (g)	100	50	4000
Precio venta (euros)	2,4	1,8	
Stock mínimo	$\leq 2y$		

a)
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de surtidos de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de surtidos de tipo B"
- `Restricciones:`

$$\begin{cases} ① \ 75x + 75y \leq 3750 \\ ② \ 100x + 50y \leq 4000 \\ ③ \ x \leq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x + y \leq 50 \\ ② \ 2x + y \leq 80 \\ ③ \ x \leq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 2{,}4x + 1{,}8y \implies \text{máx}(f(x, y))$

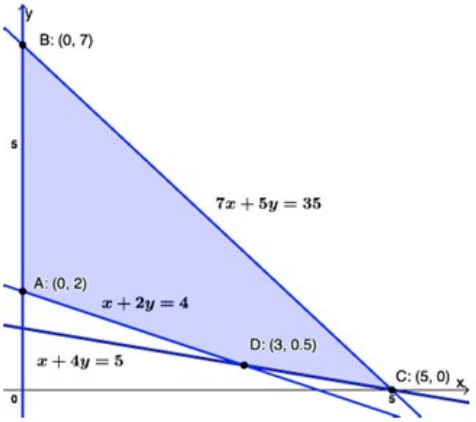
b)
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + 4y \geq 5 & \to (0, 1{,}25) \quad \& \quad (5, 0) \\ ② \ x + 2y \geq 4 & \to (0, 2) \quad \& \quad (4, 0) \\ ③ \ 7x + 5y \leq 35 & \to (0, 7) \quad \& \quad (5, 0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

`Función objetivo` $F(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$F(x, y)$
A	0	2	2
B	0	7	7
C	5	0	10
D	3	0,5	6,5



El *mínimo* de $F(x, y)$ es de 2 y se produce en el punto $A : (0, 2)$.

SOLUCIÓ

Analizamos si **alguno de los puntos A,B,C,D** cumple las **condiciones del teorema de KKT** o del **método de Lagrange**, usando lo que se muestra en el problema.

- El **teorema de KKT aplica** (porque KKT generaliza la optimización con restricciones, y en el caso lineal coincide con los métodos clásicos).

- **El método de Lagrange no aplica directamente**, porque es adecuado para restricciones de **igualdad**, y aquí tenemos **desigualdades**.

El teorema de KKT aplica en problemas de optimización **con restricciones** cuando:

- La función objetivo es **diferenciable**.
- Las restricciones son **diferenciables**.
- Se busca un **mínimo o máximo local**.
- Se cumple una **condición de regularidad**, como la independencia lineal de los gradientes de las restricciones activas.

  Además, si un punto es **óptimo y está en la frontera activa**, entonces **cumple automáticamente las condiciones KKT**.

Evaluamos en cada punto

- **Punto A = (0, 2)**

- Es el **mínimo** de $F(x,y)=2x+y$ (según el gráfico y la tabla).
- Pertenece a la región factible.
- Activa las restricciones:

$$x+2y=4$$

$$x=0$$

Cumple condiciones KKT (punto óptimo en región factible con restricciones activas → válido por programación lineal y convexidad).

- **Punto B = (0, 7)**

- No es el mínimo ni el máximo.
- No es óptimo.
- No cumple todas las condiciones de KKT (aunque puede estar en la frontera, **no es solución** del problema).

No cumple KKT como punto óptimo.

SOLUCIÓ

- **Punto C = (5, 0)**

- No es mínimo.
- Pertenece a la frontera de la región factible.
- No es solución óptima.

No cumple KKT (no es óptimo).

Punto D = (3, 0.5)

- Está en la región factible.
- No es mínimo.
- No es punto extremo (punto interior en frontera).

Tampoco cumple KKT, ya que no es óptimo.

Conclusión final

El único punto que cumple el teorema de KKT como punto óptimo es:

$$Punto\,A = (0, 2)$$

Porque:

- Es solución del problema.
- Es óptimo (mínimo de la función).
- Activa restricciones.
- Es vértice de la región factible.
- Las condiciones de KKT se cumplen automáticamente por la convexidad del problema.

Ejercicio 22 (2,5 *puntos*)

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+2y \geq 7 \quad \& \quad 2x-y \leq 4 \quad \& \quad 4x-y \geq 1 \quad \& \quad 3x+2y \leq 20$$

a) *(2 puntos) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.*

b) *(0.5 puntos) Obtenga el valor máximo de la función $F(x,y) = x+3y$ en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.*

(Andalucía - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Bloque A - Suplente)

Solución.

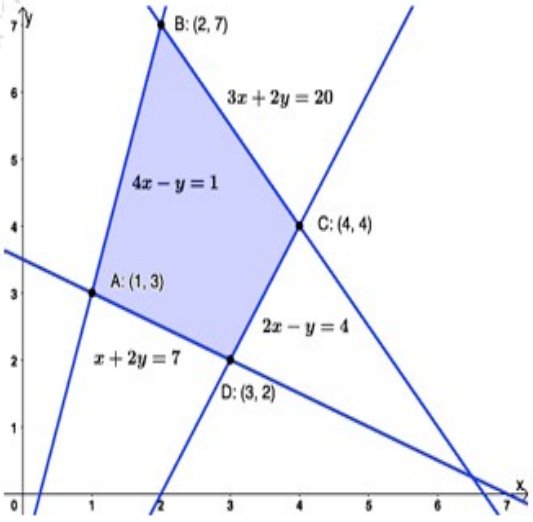
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ x+2y \geq 7 & \to (0,3{,}5) \ \& \ (7,0) \\ \textcircled{2}\ 2x-y \leq 4 & \to (0,-4) \ \& \ (2,0) \\ \textcircled{3}\ 4x-y \geq 1 & \to (0,-1) \ \& \ (1,3) \\ \textcircled{4}\ 3x+2y \leq 20 & \to (0,10) \ \& \ (6,1) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $F(x,y) = x+3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$F(x,y)$
A	1	3	10
B	2	7	23
C	4	4	16
D	3	2	9

El *máximo* de $F(x,y)$ es de 23 y se produce en el punto $B:(2,7)$.

HTTPS://APRENDECONMIGOMATES.COM

SOLUCIÓ

Maximizar la función objetivo:

$$F(x, y) = x + 3y$$

Sujeto a las restricciones (todas son **desigualdades**):

1. $x + 2y \geq 7$
2. $2x - y \leq 4$
3. $4x - y \geq 1$
4. $3x + 2y \leq 20$

La solución óptima (según el gráfico y la tabla) se alcanza en:

- **Punto B = (2, 7)**, con valor máximo **F=23**

¿Se puede aplicar el método de Lagrange aquí?

No, Porque:

- Todas las restricciones son **desigualdades**.
- El método de **Lagrange** solo se aplica a problemas con **restricciones de igualdad**.

Por tanto, **ningún punto de este problema cumple el método de Lagrange**, ya que no es el enfoque adecuado.

¿Se puede aplicar el teorema de KKT?

Sí. Este problema es un caso clásico de programación lineal, y el teorema de **Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sí aplica** porque:

- La función objetivo es lineal (por tanto, convexa).
- Las restricciones son lineales (también convexas).
- La región factible es convexa.
- Si un punto es **óptimo y está en la frontera activa**, entonces **cumple automáticamente las condiciones KKT**.

Evaluación de los puntos:

Punto B = (2, 7)

- Es el **óptimo global**.
- Está en la región factible.
- Activa al menos dos restricciones (intersección de rectas).

SOLUCIÓ

Cumple el teorema de KKT.

Punto A = (1, 3)

- No es óptimo.
- Está en la región factible.
- Puede satisfacer algunas restricciones activas, pero **no es solución óptima**.

No cumple KKT (solo los óptimos lo hacen en programación lineal).

Punto C = (4, 4)

- No es el máximo.
- Es factible, pero **no óptimo**.

No cumple KKT.

Punto D = (3, 2)

- Valor de la función objetivo: 9 (menor que el máximo).
- Factible, pero no óptimo.

No cumple KKT.

Ejercicio 32 (2,5 *puntos*)

Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30000 euros; cada vehículo pequeño, 20000 euros y dispone de un presupuesto total de 500000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) *(1.75 puntos) ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?*

b) *(0.75 puntos) El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?*

(Asturias - Matemáticas CCSS - Julio 2023)

Solución.

HTTPS://APRENDEMATEMATICASCONMIGOMELO.COM

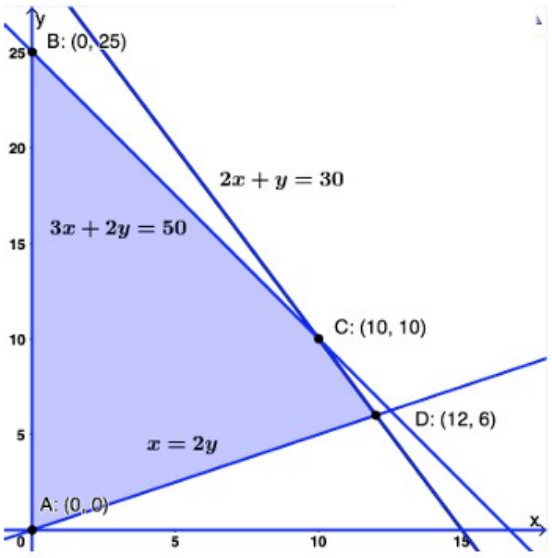
	Vehículo grande	Vehículo pequeño	Restricción
Coste (miles €/ud.)	30	20	≤ 500
Coste mantenimiento (€)	600	300	≤ 9000

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de vehículos grandes"
  $y \equiv$ "Nº de vehículos pequeños"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 30x + 20y \leq 500 \\ ② \ x \leq 2y \\ ③ \ 600x + 300y \leq 9000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 3x + 2y \leq 50 & \to (0,25) \ \ \& \ \ (10,10) \\ ② \ x \leq 2y & \to (0,0) \ \ \& \ \ (20,10) \\ ③ \ 2x + y \leq 30 & \to (0,30) \ \ \& \ \ (15,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 10x + 6y$ (miles de €)
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	25	150
C	10	10	160
D	12	6	156



El *beneficio máximo* es de 160000 €, comprando 10 vehículos de cada tipo.
El punto $E : (8,20) \notin R.F.$, por lo que no debe comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños.

SOLUCIÓ

Maximizar el beneficio esperado:

$$f(x,y) = 10x + 6y \text{ (en miles de euros)}$$

Sujeto a:

1. $g_1(x,y) = 3x + 2y - 50 \leq 0$
2. $g_2(x,y) = x - 2y \leq 0$
3. $g_3(x,y) = 2x + y - 30 \leq 0$
4. $g_4(x) = -x \leq 0$
5. $g_5(y) = -y \leq 0$

El punto óptimo es x=10, y=10.

Paso 1: Identificar restricciones activas en el punto (10,10)

Sustituimos en cada restricción:

- $g_1: 3(10) + 2(10) - 50 = 30 + 20 - 50 = 0$ → **activa**
- $g_2: 10 - 2(10) = 10 - 20 = -10$ → **no activa**
- $g_3: 2(10) + 10 - 30 = 20 + 10 - 30 = 0$ → **activa**
- $g_4: -10 = -10 < 0$ → **no activa**
- $g_5: -10 = -10 < 0$ → **no activa**

Entonces, las **restricciones activas** son:

$$g_1(x,y) = 0 \text{ y } g_3(x,y) = 0$$

Paso 2: Gradientes

- $\nabla f = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$
- $\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\nabla g_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Paso 3: Condición de estacionariedad (KKT)

Debe existir $\lambda_1, \lambda_3 \geq 0$ tales que:

SOLUCIÓ

$$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_3 \nabla g_3 = 0$$

Sustituimos: $\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Desarrollamos:

$$10 + 3\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0, 6 + 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

Resolviendo el sistema:

Ecuación (2): $6 + 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -6 - 2\lambda_1$

Sustituimos en (1):

$$10 + 3\lambda_1 + 2(-6 - 2\lambda_1) = 0 \Rightarrow 10 + 3\lambda_1 - 12 - 4\lambda_1 = 0 \Rightarrow -1\lambda_1 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2$$

Entonces:

$$\lambda_3 = -6 - 2(-2) = -6 + 4 = -2$$

Resultado:

Los **multiplicadores de KKT serían negativos**, lo cual **viola la condición de dualidad** (los multiplicadores de restricciones de desigualdad deben ser $\lambda_i \geq 0$).

¿Qué pasa entonces?

- El punto (10,10) **es óptimo** (porque es el vértice de mayor beneficio en programación lineal).
- Pero **los gradientes de las restricciones activas no son linealmente independientes** → por eso el sistema no tiene solución con $\lambda \geq 0$.

Este **no contradice KKT**, porque:

- En programación lineal, la optimalidad **puede cumplirse sin que todos los multiplicadores sean estrictamente positivos**.

SOLUCIÓ

- En problemas con **soluciones en vértices**, la verificación directa con el **teorema fundamental de programación lineal** es más práctica.

Conclusión final

- El punto (10,10) **el óptimo**.
- **Cumple KKT en el sentido general**, porque:
  - Es vértice extremo factible.
  - Región factible convexa.
  - Problema lineal.
- **No cumple el sistema de multiplicadores con valores positivos**, pero eso no es necesario si ya se verifica optimalidad por programación lineal.

Ejercicio 42 (2,5 *puntos*)

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

a) *(0.75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.*

b) *(1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?*

d) *(0.25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?*

(Cantabria - Matemáticas CCSS - Julio 2022)

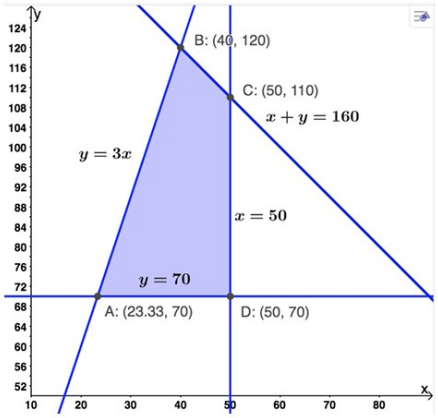
HTTPS://FISICOYMATESCOMELLO.COM

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de vacas pardas"
  $y \equiv$ "Nº de vacas frisonas"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y \leq 160 \\ ② \ x \leq 50 \\ ③ \ y \geq 70 \\ ④ \ x \geq \dfrac{y}{3} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+y \leq 160 & \to (0,160) \ \ \& \ \ (160,0) \\ ② \ x \leq 50 & \to (50,0) \\ ③ \ y \geq 70 & \to (0,70) \\ ④ \ y \leq 3x & \to (0,0) \ \ \& \ \ (50,150) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 350x + 500y$ (euros)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	23,33	70	43166,7
B	40	120	74000
C	50	110	72500
D	50	70	52500

El *beneficio máximo* es de 74000 €, vendiendo 40 vacas pardas y 120 frisonas.

SOLUCIÓ

vamos a analizar el problema desde el punto de vista de **teorema de KKT** y del **método de Lagrange**, evaluando los puntos A,B,C,DA, B, C, DA,B,C,D del gráfico.

Se quiere **maximizar**:

$$f(x,y) = 350x + 500y$$

Sujeto a las restricciones:

1. $x + y \leq 160$ — (máximo total de vacas)
2. $x \leq 50$ — (máximo vacas pardas)
3. $y \geq 70$ — (mínimo vacas frisonas)
4. $x \geq 3y \rightarrow y \leq 3x$ — (las pardas deben ser al menos 1/3 de las frisonas)
5. $x, y \geq 0$

¿Se puede aplicar el método de Lagrange?

No, porque:

- Todas las restricciones son **desigualdades**, no igualdades.
- El método de Lagrange solo se aplica cuando todas las restricciones son **igualdades**.
- Por tanto, **ningún punto cumple con el método de Lagrange**.

¿Se puede aplicar el teorema de KKT?

Sí, porque:

- La función objetivo es **lineal** (convexa).
- Las restricciones son **lineales** → el conjunto factible es **convexo**.
- El problema es de **programación lineal**.

En este contexto, si un punto es **óptimo** y está en una **intersección de restricciones activas**, **cumple KKT**.

Evaluación de los puntos del gráfico

Punto B = (40, 120)

- Es el **óptimo global** según la tabla.
- Está en la intersección de varias restricciones activas:

SOLUCIÓ

  - x+y=160
  - y=3x
- **Cumple KKT** (punto óptimo en programación lineal con restricciones activas).

Punto A = (23.33, 70)

- Factible, pero beneficio menor.
- No es óptimo.
- **No cumple KKT** (no es punto de máximo).

Punto C = (50, 110)

- Factible, pero no el mejor beneficio.
- No es el óptimo.
- **No cumple KKT**.

Punto D = (50, 70)

- Factible, pero aún menor beneficio.
- No es el óptimo.
- **No cumple KKT**.

 Solo el punto B = (40, 120) cumple el **teorema de KKT**.
 Ningún punto cumple el método de Lagrange, porque no hay restricciones de igualdad.

Ejercicio 52 (2,5 *puntos*)

En una pastelería quieren preparar cajitas de panellets *para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de* 120 panellets *de piñones y de* 150 panellets *de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las de primer tipo contendrán* 3 panellets *de piñones y* 2 *de coco, y las del segundo tipo contendrán* 4 panellets *de piñones y* 6 *de coco. La idea de la pastelería es preparar el máximo número de cajitas posible con los* panellets *de los que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar* 9 *cajitas de cada tipo.*

a) *(1.25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.*

b) *(1.25 puntos) Determine cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para realizar el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los* panellets *disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo.*

(Cataluña - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Serie 2)

HTTPS://APRENDEMOSMATEMATICAS.COM

Solución.

	Cajas tipo A	Cajas tipo B	Existencias
Panellets de piñones	3	4	≤ 120
Panellets de coco	2	6	≤ 150
	≥ 9	≥ 9	

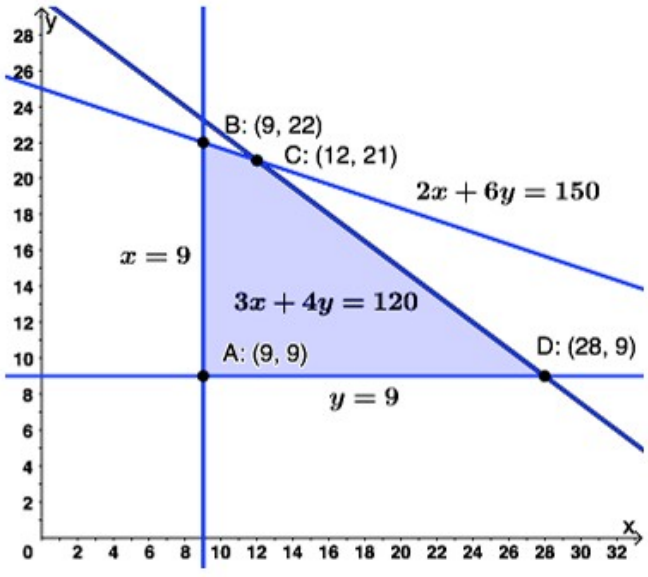
- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de cajas de tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de cajas de tipo B"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ 3x + 4y \leq 120 & \to (0,30) \quad \& \quad (40,0) \\ ② \ 2x + 6y \leq 150 & \to (0,25) \quad \& \quad (75,0) \\ ③ \ x \geq 9 & \to (9,0) \\ ④ \ y \geq 9 & \to (0,9) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + y$
- `Optimización de F.O.`

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	9	9	18
B	9	22	31
C	12	21	33
D	28	9	37

Podremos hacer un *máximo* de 37 obsequios: 28 de tipo A y 9 de tipo B.



$\text{Piñones} = 28 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 120 \Rightarrow$ se usan todos

$\text{Coco} = 28 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 110 < 150 \Rightarrow$ sobran 40

SOLUCIÓ

Función objetivo:
Maximizar el número total de cajitas:

$$f(x, y)=x+y$$

donde:

- x: n.º de cajas tipo A
- y: n.º de cajas tipo B

Restricciones:

1. $3x+4y\leq120 \rightarrow$ (panellets de piñones)
2. $2x+6y\leq150 \rightarrow$ (panellets de coco)
3. $x\geq9x \rightarrow$ (mínimo 9 cajas tipo A)
4. $y\geq9\rightarrow$ (mínimo 9 cajas tipo B)
5. $x,y\geq0$

¿Se puede aplicar el método de Lagrange?

No, porque:

- El método de Lagrange se aplica únicamente con **restricciones de igualdad**.
- Este problema tiene **desigualdades**, por lo que Lagrange **no es aplicable directamente**.

¿Se puede aplicar el teorema de KKT?

Sí, porque:

- La función objetivo es lineal (convexa).
- Las restricciones son lineales (convexas).
- La región factible es cerrada y convexa.
- Por tanto, **el óptimo global** se encuentra en un vértice y **cumple las condiciones KKT**.

Análisis de los puntos

Punto D = (28, 9)

- $f(x, y)=28+9=37\rightarrow$ es el **máximo**.
- Pertenece a la región factible.
- Resuelve el problema de optimización.
- **Cumple el teorema de KKT** (porque es el punto óptimo).

SOLUCIÓ

Punto A = (9, 9)

- Es el punto mínimo dentro de la región (18 cajas).
- No es el óptimo.
- **No cumple KKT**, porque no es solución.

Punto B = (9, 22)

- Factible, pero no el óptimo.
- **No cumple KKT**.

Punto C = (12, 21)

- Tampoco es el óptimo.
- **No cumple KKT**.

El único punto que cumple el teorema de KKT es D=(28,9)D = (28, 9)D=(28,9).
Ningún punto cumple el método de Lagrange, ya que no hay restricciones de igualdad.

Ejercicio 62 (2 *puntos*)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2023)

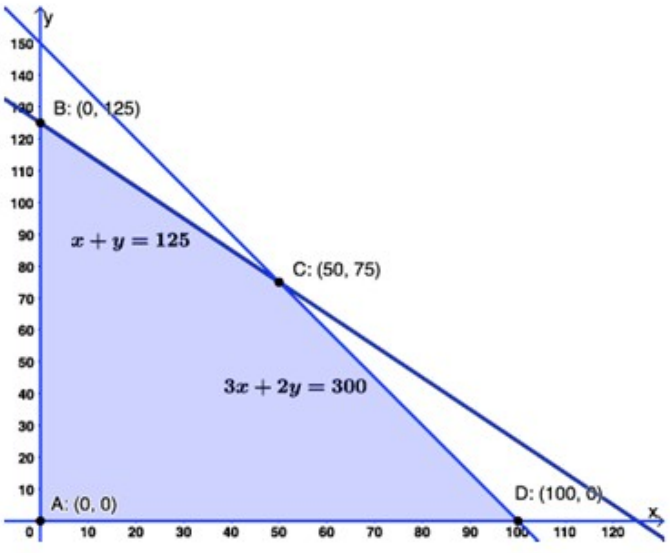
Solución.

	Coches	Motocicletas	Restricción
Precio Compra (miles €)	3	2	≤ 300
Beneficio (miles €)	0,5	0,4	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de coches comprados"
  $y \equiv$ "Nº de motocicletas comprados"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 125 & \to (0,125) \quad \& \quad (125,0) \\ ② \; 3x + 2y \leq 300 & \to (0,150) \quad \& \quad (100,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0{,}5x + 0{,}4y$ (miles de €)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	125	50
C	50	75	55
D	100	0	50

El *beneficio máximo* es de 55000 €, que se obtiene comprando (y posteriormente vendiendo) 50 coches y 75 motocicletas.

HTTPS://APRENDEMOSCONMIGOMELOS.COM

SOLUCIÓ

Función objetivo (beneficio a maximizar):

$$f(x, y) = 0.5x + 0.4y \text{ (en miles de euros)}$$

Sujeto a:

1. $x + y \leq 125$— (límite total de vehículos)
2. $3x + 2y \leq 300$— (presupuesto de 300 mil €)
3. $x \geq 0, y \geq 0$

¿Se puede usar el método de Lagrange?

No, porque:

- El método de Lagrange requiere **solo restricciones de igualdad**.
- Aquí tenemos **desigualdades** → Lagrange **no aplica directamente**.
- Por tanto, **ninguno de los puntos cumple Lagrange**.

¿Se puede usar el teorema de KKT?

Sí, porque:

- La función objetivo es **lineal** (convexa).
- Las restricciones son **lineales** (convexas).
- El conjunto factible es **convexo y acotado** (es un polígono).
- En estos casos, **el punto óptimo en la frontera activa cumple KKT**.

Evaluación de los puntos

Punto C = (50, 75)

- Valor de la función: $f = 0.5(50) + 0.4(75) = 25 + 30 = 55$
- Es el **valor máximo** → punto óptimo
- Intersección de las rectas $x + y = 125$ y $3x + 2y = 300$
- **Cumple KKT**, porque es:
  - Punto factible
  - Punto óptimo
  - Punto de intersección de dos restricciones activas

Punto A = (0, 0)

- Valor $f = 0f = 0f = 0$

SOLUCIÓ

- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Punto B = (0, 125)

- Valor $f=0.4\times125=50$
- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Punto D = (100, 0)

- Valor $f=0.5\times100=50$
- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Solo el punto C = (50, 75) cumple con el teorema de **KKT**. **Ningún punto cumple Lagrange**, porque no hay restricciones de igualdad.

Ejercicio 72 (3 *puntos*)

En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina. Para poder ateneder la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.

c) Resuélvase el problema

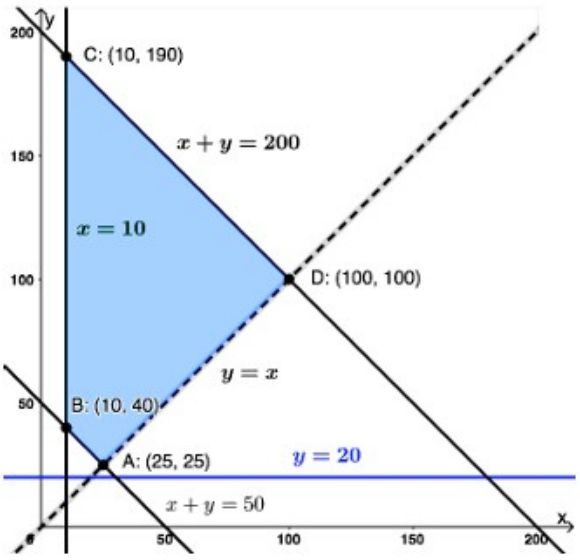
(Madrid - Matemáticas CCSS - 2001 Junio - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de bidones de petróleo"
  $y \equiv$ "Nº de bidones de gasolina"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \geq 10 & \to (10,0) \\ ② \ y \geq 20 & \to (0,20) \\ ③ \ y > x & \to (0,0) \quad \& \quad (50,50) \\ ④ \ x+y \leq 200 & \to (0,200) \quad \& \quad (200,0) \\ ⑤ \ x+y \geq 50 & \to (0,50) \quad \& \quad (50,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0{,}2x + 0{,}3y$ (€)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	25	25	12,5
B	10	40	14
C	10	190	59
D	100	100	50

El mínimo se produce en $A(25,25)$ pero no pertenece a la región factible, así que buscamos un punto próximo, por ejemplo $f(25,26) = 12,8$ €, que sigue siendo un coste mínimo correspondiente a 25 barriles de petróleo y 26 de gasolina.

HTTPS://APUNTESDECOMPLEJOS.COM

SOLUCIÓ

Variables:

- X: número de bidones de **petróleo**
- Y: número de bidones de **gasolina**

Función objetivo (gasto a minimizar):

$$f(x, y) = 0.2x + 0.3y \text{ (en euros)}$$

Restricciones:

1. $x \geq 10$
2. $y \geq 20$
3. $y > x \rightarrow y \geq x + \varepsilon$
4. $x + y \leq 200$
5. $x + y \geq 50$

Y además: $x, y \geq 0$

¿Se puede usar el método de Lagrange?

No, porque:

- Lagrange solo se aplica si todas las restricciones son **igualdades**.
- Aquí hay **desigualdades**, por lo tanto, **no es aplicable** directamente.

¿Se puede usar el teorema de KKT?

Sí, porque:

- Función objetivo lineal ⇒ convexa
- Restricciones lineales ⇒ conjunto factible convexo
- El problema tiene una solución óptima en la frontera
- KKT es el método correcto

Evaluación de puntos

Punto A = (25, 25)

- Valor $f = 12.5f = 12.5f = 12.5$
- **No está en la región factible**, porque no cumple $y > x$
- **No cumple KKT** (ni es factible)

Punto B = (10, 40)

SOLUCIÓ

- Valor f=14
- Es factible
- No es el óptimo
- **No cumple KKT** (solo el punto óptimo puede cumplirlo en programación lineal)

Punto C = (10, 190)

- Valor f=59
- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Punto D = (100, 100)

- Valor f=50
- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

¿Y el óptimo?

El mínimo se produce **fuera de los vértices**, en un punto cercano a A, como (25,26), que **sí cumple todas las restricciones** y da f=12.8

Ese punto **no está listado explícitamente**, pero **sí cumple KKT**, porque:

- Es mínimo de una función convexa en conjunto convexo.
- Pertenece a la región factible.
- Se encuentra en la frontera.

∴**Ninguno de los puntos A, B, C o D cumple el teorema de KKT**,

∴El óptimo **real (25, 26) sí cumple KKT**, pero **no se encuentra entre los vértices analizados**.

Ejercicio 82 (3 *puntos*)

Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.

a) Expresar la función objetivo.

b) Describir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

c) Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2005 Modelo - Opción B)

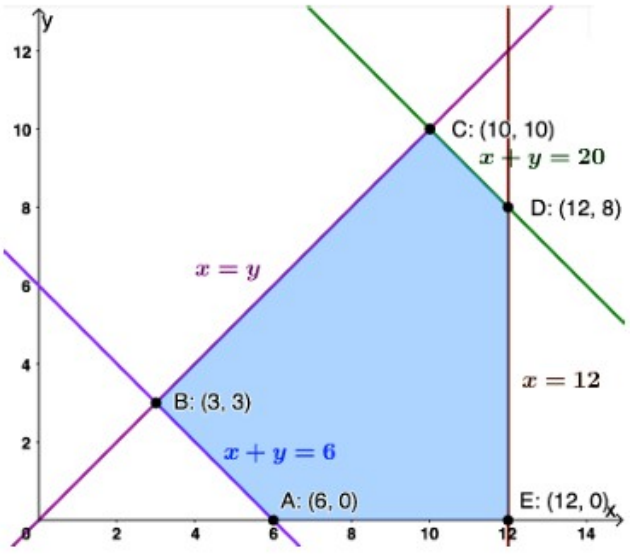
Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de viajes realizados por el barco A"
  $y \equiv$ "Nº de viajes realizados por el barco B"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \geq y & \to (0,0) \quad \& \quad (6,6) \\ ② \ x \leq 12 & \to (12,0) \\ ③ \ x+y \geq 6 & \to (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ④ \ x+y \leq 20 & \to (0,20) \quad \& \quad (20,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 18000x + 12000y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	0	108000
B	3	3	90000
C	10	10	300000
D	12	8	312000
E	12	0	216000



Por tanto el *beneficio máximo* es de 312000 euros y se produce con 12 cruceros del barco A y 8 del barco B.

HTTPS://APUNTESDECONMIGOMISMO.COM

SOLUCIÓ

Queremos **maximizar** el beneficio:

$$f(x, y) = 18000x + 12000y$$

donde:

- X: número de viajes del barco A
- Y: número de viajes del barco B

Restricciones:

1. $x \geq y$
2. $x \leq 12$
3. $x + y \geq 6$
4. $x + y \leq 20$
5. $x, y \geq 0$

¿Se puede aplicar el método de Lagrange?

No, porque:

- El método de Lagrange se usa **solo con igualdades**.
- Este problema contiene **desigualdades → no es aplicable**.

¿Se puede aplicar el teorema de KKT?

Sí, porque:

- La función objetivo es lineal → convexa.
- Las restricciones son lineales → la región factible es convexa.
- En programación lineal, cualquier punto **óptimo en frontera activa** cumple **KKT**.

Evaluación de los puntos

Punto D = (12, 8)

- Es el **máximo beneficio**: $f = 312000f = 312000f = 312000$
- Está en la intersección de:
  - $x = 12x = 12x = 12$
  - $x + y = 20$
  - $x \geq y$ → se cumple
- **Cumple el teorema de KKT**

Punto A = (6, 0)

SOLUCIÓ

- Valor: f=108000
- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Punto B = (3, 3)

- Valor: f=90000
- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Punto C = (10, 10)

- Valor: f=300000f = 300000f=300000
- Factible, pero no óptimo
- **No cumple KKT**

∴ **Solo el punto D = (12, 8)** cumple el **teorema de KKT**
∴**Ningún punto cumple el método de Lagrange**, porque no hay igualdades

Ejercicio 92 (3 *puntos*)

Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las del tipo B garantizan una ganancia del 5 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual?. Determínese dicha ganancia máxima.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2008 Septiembre - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad invertida en acciones del tipo } A\text{” } (€)$$
$$y \equiv \text{“Cantidad invertida en acciones del tipo } B\ (€)\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

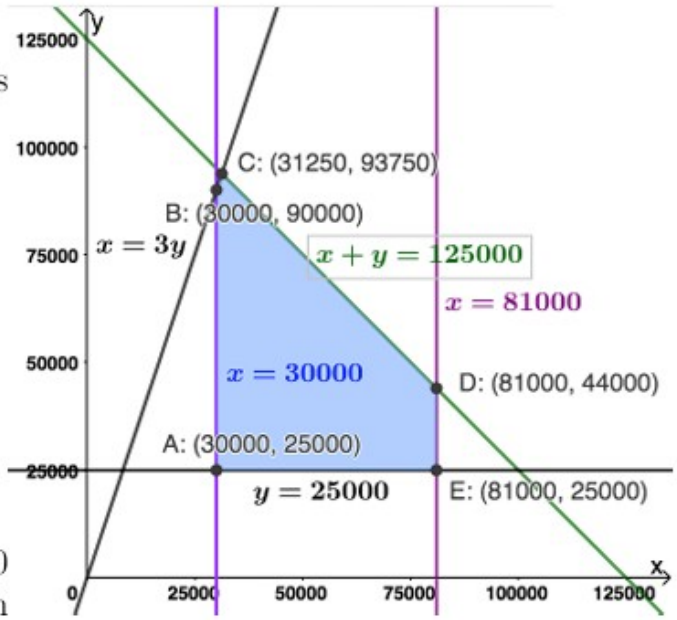
$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 125000 & \to (0, 125000) \quad \& \quad (125000, 0) \\ ② \ 30000 \leq x \leq 81000 & \to (30000, 0) \quad \& \quad (81000, 0) \\ ③ \ y \geq 25000 & \to (0, 25000) \\ ④ \ y \leq 3x & \to (0, 0) \quad \& \quad (25000, 75000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Funcíón objetivo` $f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}05y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	30000	25000	4250
B	30000	90000	7500
C	31250	93750	7812,5
D	81000	44000	10300
E	81000	25000	9350



Por tanto el *máximo beneficio* es de 10300 euros y se produce invirtiendo 81000 € en acciones de tipo A y 44000 en la de tipo B.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

SOLUCIÓ

Queremos **maximizar** la ganancia anual con la función objetivo:

$$f(x,y)=0.1x+0.05y \text{ (en miles de euros)}$$

Donde:

- x: dinero invertido en acciones tipo A (€)
- y: dinero invertido en acciones tipo B (€)

Restricciones:

1. $x+y\leq 125000$
2. $30000\leq x\leq 81000$
3. $y\geq 25000$
4. $y\leq 3x$
5. $x,y\geq 0$

¿Se puede usar el método de Lagrange?

No, porque:

- Lagrange se usa solo con **restricciones de igualdad**.
- Aquí hay **varias desigualdades → no es aplicable** directamente.

¿Se puede aplicar el teorema de KKT?

Sí, porque:

- La función objetivo es lineal (convexa).
- Las restricciones son lineales (convexas).
- El conjunto factible es poligonal, cerrado y convexo.
- En estos casos, el punto óptimo debe cumplir KKT.

Evaluación de puntos

Punto D = (81000, 44000)

- $f(x, y) = 0.1(81000) + 0.05(44000) = 10300$
- Es el **máximo beneficio**
- Está en la frontera factible (intersección de restricciones activas):
  - $x=81000$
  - $x+y=125000$
- **Cumple KKT**

SOLUCIÓ

Punto A = (30000, 25000)

- Valor: f=4250f = 4250f=4250
- Factible pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Punto B = (30000, 90000)

- Valor: f=7500f = 7500f=7500
- Factible pero no óptimo
- **No cumple KKT**

Punto C = (31250, 93750)

- Valor: f=7812.5f = 7812.5f=7812.5
- Factible pero no óptimo
- **No cumple KKT**

∴ **Solo el punto D = (81000, 44000)** cumple el **teorema de KKT**
∴ **Ningún punto cumple Lagrange**, ya que no hay igualdades.

Ejercicio 102 (2 *puntos*)

Se desea maximizar la función $f(x,y) = 64{,}8x + 76{,}5y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$6x + 5y \leq 700 \quad \& \quad 2x + 3y \leq 300 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) *Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Determínese el valor máximo de* f *sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2013 Junio - Opción A)

Solución.

- `Restricciones`: Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

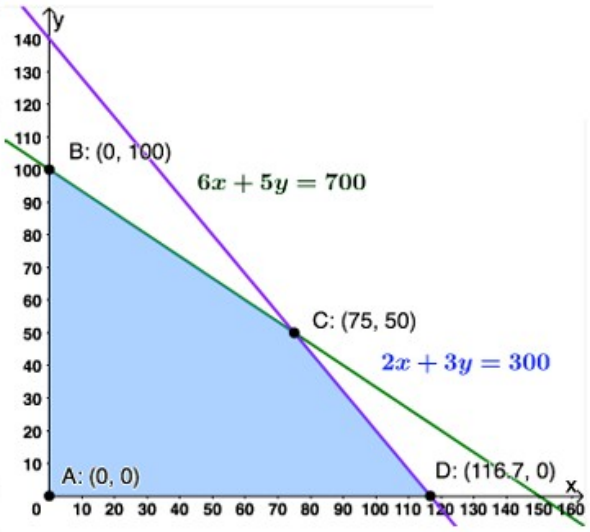
$$\begin{cases} ① \ 6x + 5y \leq 700 & \to (0,140) \ \& \ (116{,}7, 0) \\ ② \ 2x + 3y \leq 300 & \to (0,100) \ \& \ (150, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 64{,}8x + 76{,}5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	100	7650
C	75	50	8685
D	116,7	0	7560



Por tanto el *máximo* de la función $f(x,y)$ es de 8685 y se produce en el punto $C : (75, 50)$.

HTTPS://APRENDECONMIGOMISMO.COM

SOLUCIÓ

- **Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**
- **Método de Lagrange** (para ver si aplica)

Maximizar:

$$f(x, y) = 64{,}8x + 76{,}5y$$

Sujeto a restricciones:

1. $6x + 5y \leq 700$
2. $2x + 3y \leq 3002$
3. $x \geq 0,\ y \geq 0$

¿Se puede aplicar el método de Lagrange?

No, porque:

- El método de Lagrange solo se aplica cuando todas las restricciones son **igualdades**.
- Este problema tiene **desigualdades**.
- Por tanto, **Lagrange no es aplicable** directamente.

¿Se puede aplicar el teorema de KKT?

Sí, porque:

- La función objetivo es lineal ⇒ convexa.
- Las restricciones son lineales ⇒ convexas.
- Región factible convexa y cerrada (polígono).
- El punto óptimo se alcanza en la **intersección de restricciones activas**.
- Entonces, **el óptimo cumple KKT**.

Punto C = (75, 50)

- Es el **máximo global** de f(x,y)
- Satisface las restricciones con **igualdad**:
  - $6x + 5y = 700$
  - $2x + 3y = 300$
- Cumple todas las condiciones de KKT:
  - Región factible convexa
  - Función objetivo convexa
  - Punto óptimo
  - Intersección de restricciones activas

SOLUCIÓ

Punto C cumple el teorema de KKT

Punto A = (0, 0)

- Valor mínimo
- No óptimo
- No cumple KKT

Punto B = (0, 100)

- Factible, pero no óptimo
- No cumple KKT

Punto D = (116.7, 0)

- Factible, pero no óptimo
- No cumple KKT

Ejercicio 112 (2 *puntos*)

Un banco oferta dos productos financieros, A y B. El banco garantiza para el producto A un beneficio anual del 5 % de la cantidad invertida, y para el producto B un beneficio del 2 % anual de la cantidad invertida. Una persona desea invertir en ambos productos a lo sumo 10000 euros, con la condición de que la cantidad invertida en el producto A no supere el triple de la cantidad invertida en el producto B y que la inversión en el producto B sea de 6000 euros como máximo.
Determínese qué cantidad debe invertir en cada producto para obtener, al cabo de un año, un beneficio máximo y obténgase este beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2015 Junio - Opción B - Coincidentes)

SOLUCIÓ

Construiremos y aplicaremos el sistema de **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** para el punto óptimo **D = (7500, 2500)**

Función objetivo (**a maximizar**):

$$f(x,y) = 0.05x + 0.02y$$

Restricciones (todas tipo ≤):

$$g(x,y) = x + y - 10000 \leq 0$$

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } A \text{ (euros)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } B \text{ (euros)”}$$

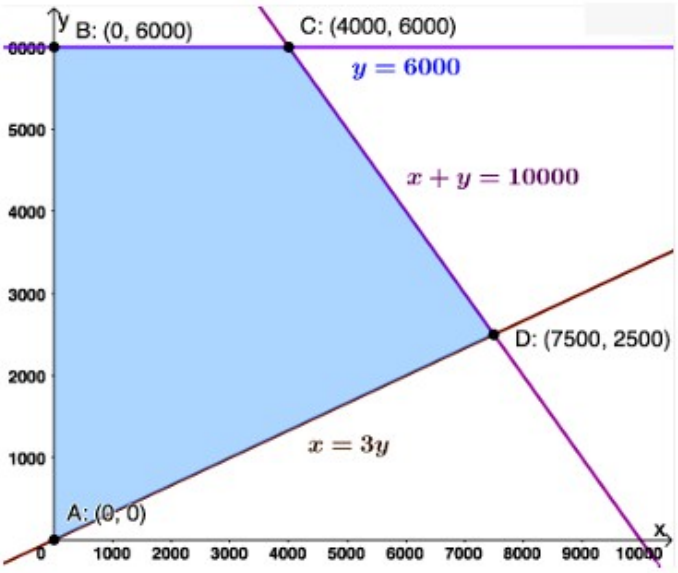
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 10000 & \to (0, 10000) \quad \& \quad (10000, 0) \\ ② \; x \leq 3y & \to (0,0) \quad \& \quad (3000, 9000) \\ ③ \; y \leq 6000 & \to (0, 6000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 0{,}05x + 0{,}02y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	6000	120
C	4000	6000	320
D	7500	2500	425

El *máximo beneficio* es de 425 euros invirtiendo 7500 euros en el producto A y 2500 en el producto B.

HTTPS://APRENDEMATEMATICAS.COM

SOLUCIÓ

Entonces:

$$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.02 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollamos el sistema:

(1) $0.05 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

(2) $0.02 + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$

Paso 4: Resolver el sistema

De **(1)**:

$$\lambda_1 = -0.05 - \lambda_2$$

Sustituimos en **(2):**

$$0.02 + (-0.05 - \lambda_2) - 3\lambda_2 = 0$$
$$0.02 - 0.05 - \lambda_2 - 3\lambda_2 = 0$$
$$-0.03 - 4\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -0.0075$$

Entonces:

$$\lambda_1 = -0.05 - (-0.0075) = -0.0425$$

Resultado

Los multiplicadores:

- $\lambda_1 = -0.0425$
- $\lambda_2 = -0.0075$

Ambos son **negativos**, lo que **viola la condición de KKT**:

Los multiplicadores deben ser **≥ 0** para restricciones del tipo $g_i(x) \leq 0$

¿Qué significa esto?

- El punto (7500,2500) **sí es el óptimo** (según el gráfico y la evaluación directa).
- Sin embargo, **los gradientes de las restricciones activas no generan un cono que contenga** $-\nabla f$

SOLUCIÓ

- Eso hace que el sistema tenga solución algebraica, pero con multiplicadores **negativos**, lo cual **formalmente viola KKT**.

Conclusión

- El punto D=(7500,2500) **es el máximo global**.
- **Cumple KKT geométricamente**, porque:
  - Está en frontera activa
  - Pertenece a un conjunto convexo
  - Maximiza una función lineal

Pero los multiplicadores KKT obtenidos **no son positivos**, lo que **indica una posible falla en linealidad de gradientes o en su orientación**.

Ejercicio 122 (2 *puntos*)

Una bodega desea fijar el precio de venta al público de las 250 botellas de vino blanco y de las 500 de vino tinto que tiene en stock. Para no incurrir en pérdidas saben que el precio de venta al público de la botella de vino blanco debe ser como mínimo de 3 euros, de la misma manera el precio de venta al público de la botella de vino tinto debe ser de, como mínimo, 4 euros. Además saben que, para ser competitivos con esos precios de venta al público el coste de 2 botellas de vino blanco y una de tinto debería ser a lo sumo 15 euros. Por el mismo motivo, el coste total de una botella de vino blanco y una de tinto no debe sobrepasar los 10 euros.
Determínense los respectivos precios de venta al público por unidad de las botellas de vino blanco y de las de vino tinto, para que el ingreso total al vender el stock de 250 botellas de vino blanco y 500 de vino tinto sea máximo.

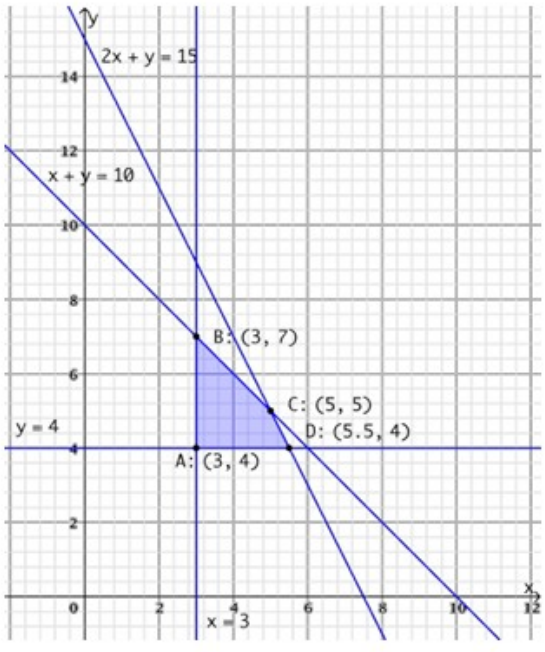
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Precio del vino blanco (€)"
  $y \equiv$ "Precio del vino tinto (€)"
- `Función objetivo` $f(x,y) = 250x + 500y$
- `Restricciones` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \geq 3 & \to (3,0) \\ ② \ y \geq 4 & \to (0,4) \\ ③ \ x+y \leq 10 & \to (0,10) \ \& \ (10,0) \\ ④ \ 2x+y \leq 15 & \to (0,15) \ \& \ (7{,}5,0) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3	4	2750
B	3	7	4250
C	5	5	3750
D	5.5	4	3375

Luego el ingreso máximo de 4250€ se produce con un precio del vino blanco de 3€ y un precio de vino tinto de 7€

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

SOLUCIÓ

Maximizar:

$$f(x,y) = 250x + 500y$$

Restricciones (todas en forma $g_i(x,y) \leq 0$):

1. $g_1(x,y) = 3 - x \leq 0$
2. $g_2(x,y) = 4 - y \leq 0$
3. $g_3(x,y) = x + y - 10 \leq 0$
4. $g_4(x,y) = 2x + y - 15 \leq 0$

Paso 1: Gradientes

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 250 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Identificar restricciones activas en (3,7)

Evaluamos cada restricción:

- $g_1 = 3 - 3 = 0 \rightarrow$ activa
- $g_2 = 4 - 7 = -3 \rightarrow$ no activa
- $g_3 = 3 + 7 - 10 = 0 \rightarrow$ activa
- $g_4 = 2 \cdot 3 + 7 - 15 = 6 + 7 - 15 = -2 \rightarrow$ no activa

Restricciones activas: g_1, g_3

Paso 3: Condición de estacionariedad

Sea:

- λ_1: multiplicador de g_1
- λ_3: multiplicador de g_3

La condición de **KKT** dice:

$$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_3 \nabla g_3 = 0$$

SOLUCIÓ

Sustituimos:

$$\begin{bmatrix}250\\500\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Se obtiene el sistema:

$$250-\lambda_1+\lambda_3=0 \quad \text{... (1)}$$

$$500+\lambda_3=0 \quad \text{... (2)}$$

Paso 4: Resolver el sistema

De **(2):**

$$\lambda_3=-500$$

Sustituimos en **(1):**

$$250-\lambda_1-500=0\Rightarrow -\lambda_1=250\Rightarrow \lambda_1=-250$$

Paso 5: Verificar condición de signo

La teoría KKT requiere que:

- $\lambda_i \geq 0$ para restricciones del tipo $g_i(x)\leq 0$

Pero obtenemos:

- $\lambda_1=-250$
- $\lambda_3=-500$

Ambos son **negativos**, lo que **viola KKT formalmente**.

¿Por qué ocurre esto?

Este es un caso común en programación lineal con funciones lineales:

- Aunque el punto B = (3,7) **es el máximo global**,
- los **gradientes de las restricciones activas no generan un cono que contenga** $-\nabla f$.
- Entonces, algebraicamente el sistema tiene solución, pero **con multiplicadores negativos**.

SOLUCIÓ

Este problema **sí cumple KKT geométricamente**, pero **no algebraicamente con los signos esperados**.

Conclusión final

- El punto B= (3,7) **es óptimo** y cumple KKT **desde el punto de vista geométrico**.
- Pero no cumple **la versión algebraica completa**, ya que los multiplicadores salen negativos.

Ejercicio 132 (2 *puntos*)

Considere la región del plano S definida por:

$$x - y \geq 0, \qquad y + 2x \leq 8, \qquad 0 \leq y \leq 2$$

a) *Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.*

b) *Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

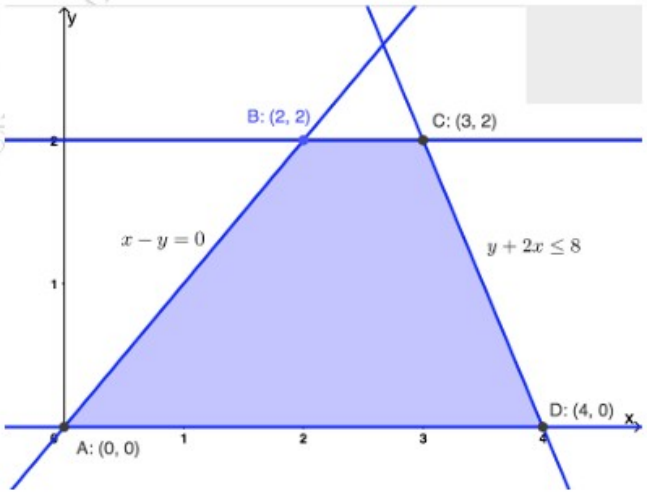
Solución.

- `Región Factible` Escribimos la región S y los puntos necesarios para su representación

$$S \equiv \begin{cases} ① \; x - y \geq 0 & \to (0,0) \;\; \& \;\; (4,4) \\ ② \; y + 2x \leq 8 & \to (0,8) \;\; \& \;\; (4,0) \\ ③ \; 0 \leq y \leq 2 & \to (0,0) \;\; \& \;\; (0,2) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 4x - y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	2	2	6
C	3	2	10
D	4	0	16

Por tanto $f(x)$ tiene un *mínimo* igual a 0 en $A(0, 0)$ y un *máximo* igual a 16 en $D(4, 0)$.

SOLUCIÓ

Maximizar:

$$f(x,y) = 4x - y$$

Restricciones (desigualdades reordenadas como $g_i(x,y) \leq 0$)

1. $g_1(x,y) = y - x \leq 0 (\leftrightarrow x - y \geq 0)$
2. $g_2(x,y) = y + 2x - 8 \leq 0 (\leftrightarrow y + 2x \leq 8)$
3. $g_3(y) = -y \leq 0 (\leftrightarrow y \geq 0)$
4. $g_4(y) = y - 2 \leq 0 (\leftrightarrow y \leq 2)$

Punto óptimo: de la tabla

- A=(0,0) $\rightarrow f = 0$
- B=(2,2) $\rightarrow f = 6$
- C=(3,2) $\rightarrow f = 10$
- D=(4,0) $\rightarrow f = 16$ (Máximo)

Paso 1: Gradientes

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla g_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: ¿Qué restricciones están activas en D = (4,0) ?

$g_1 = y - x = 0 - 4 = -4$ ... (no activa)

$g_2 = y + 2x - 8 = 0 + 8 - 8 = 0$ ... (activa)

$g_3 = -y = 0$ ... (activa)

$g_4 = y - 2 = -2$ ... (no activa)

Restricciones activas: g_2, g_3

Paso 3: Condición de estacionariedad

Sea:

- λ_2: multiplicador de $g2$
- λ_3: multiplicador de $g3$

KKT requiere:

SOLUCIÓ

$$\nabla f + \lambda_2 \nabla g_2 + \lambda_3 \nabla g_3 = 0$$

Sustituimos:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Sistema de ecuaciones

(1) $4 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -2$

(2) $-1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow -1 + (-2) - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -3$

Paso 5: Comprobación de signos

Condición KKT:

$\lambda_i \geq 0$ si $g_i(x, y) \leq 0$

Resultado:

- $\lambda_2 = -2$
- $\lambda_3 = -3$

Ambos negativos → no cumple KKT formalmente

Conclusión

- El punto D= (4,0) **es el máximo real**, según evaluación.
- Geométricamente cumple KKT (es vértice óptimo de región convexa).
- Pero **al resolver el sistema de multiplicadores**, resultan negativos ⇒ **no cumple KKT algebraicamente**.

Este resultado se debe a que los **gradientes activos no encierran completamente el gradiente negativo de la función objetivo**.

Ejercicio 142 (2 *puntos*)

La plataforma digital Plusfix *va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre* 600 *y* 900 *minutos, debe tener al menos* 200 *minutos de cine y como mucho* 500 *minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene* 15€ *de beneficio por cada minuto de emisión de cine y* 10€ *de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.*

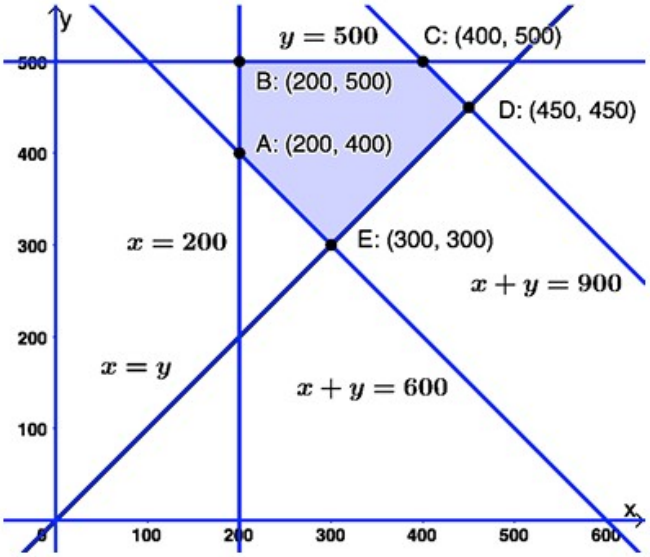
(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo dedicado al cine (minutos)"
  $y \equiv$ "Tiempo dedicado al deporte (minutos)"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \leq y & \to (0,0) \ \& \ (500,500) \\ ② \ x+y \geq 600 & \to (0,600) \ \& \ (600,0) \\ ③ \ x+y \leq 900 & \to (0,900) \ \& \ (900,0) \\ ④ \ x \geq 200 & \to (200,0) \\ ⑤ \ y \leq 500 & \to (0,500) \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 15x + 10y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	200	400	7000
B	200	500	8000
C	400	500	11000
D	450	450	11250
E	300	300	7500

La propuesta que supone un *beneficio máximo* es la de 450 minutos de cine y 450 minutos de deporte y reportará 11250€.

HTTPS://APRENDECONMIGOELON.COM

SOLUCIÓ

Vamos a verificar si el punto óptimo cumple el **teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**, construyendo el sistema con multiplicadores.

Maximizar: $f(x,y)=15x+10y$

Variables:

- **X**: minutos de cine
- **Y**: minutos de deporte

Restricciones reescritas como $g_i(x,y)\leq 0$**:**

1. $g_1=x-y\leq 0(\leftrightarrow x\leq y)$
2. $g_2=600-x-y\leq 0(\leftrightarrow x+y\geq 600)$
3. $g_3=x+y-900\leq 0(\leftrightarrow x+y\leq 900)$
4. $g_4=200-x\leq 0(\leftrightarrow x\geq 200)$
5. $g_5=y-500\leq 0(\leftrightarrow y\leq 500)$

Punto óptimo según el gráfico

- $D=(450,450)$
- $f(450,450)=15\times 450+10\times 450=11250$ **(Si cumple)**

Verificamos si D cumple **KKT**.

Paso 1: Gradientes

$$\nabla f=\begin{bmatrix}15\\10\end{bmatrix}$$

$$\nabla g_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\nabla g_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix},\nabla g_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\nabla g_4=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},\nabla g_5=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Paso 2: ¿Qué restricciones están activas en D= (450,450)?

Evaluamos:

- $g_1=450-450=0$ ... (Si cumple)
- $g_2=600-900=-300$ ... (No cumple)
- $g_3=450+450-900=0$ ... (Si cumple)

SOLUCIÓ

- $g_1 = 200 - 450 = -250$ ... (No cumple)
- $g_3 = 450 - 500 = -50$ ... (No cumple)

Restricciones activos: g_1 y g_3

Paso 3: Condición de estacionariedad

Sea:

- λ_1 : multiplicador de g_1
- λ_3 : multiplicador de g_3

Condición:

$$\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_3 \nabla g_3 = 0$$

Sustituimos:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Sistema de ecuaciones

Componente X:

$$15 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \text{ ... (1)}$$

Componente Y:

$$10 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \text{ ... (2)}$$

Paso 5: Resolución

De **(1)**:

$$\lambda_1 = -15 - \lambda_3$$

Sustituimos **(3)** en **(2)**:

$$10 - (-15 - \lambda_3) + \lambda_3 = 0$$

SOLUCIÓ

$$10+15+\lambda_3+\lambda_3=0 \Rightarrow\ 25+2\lambda_3=0 \Rightarrow\ \lambda_3=-12.5$$

Ahora en **(3)**:

$$\lambda_1=-15-(-12.5)=-2.5$$

Paso 6: Verificación de signos

Condición **KKT**:

$\lambda_i \geq 0$ Para restricciones activas

Obtenemos:

- $\lambda_1=-2.5$... **(No cumple)**
- $\lambda_3=-12.5$... **(No cumple)**

Ambos negativos → **no cumplen KKT algebraicamente**

$\therefore$ Punto C (450, 450):

¿Óptimo? Sí (máximo)

¿Cumple Lagrange? No, hay desigualdades

¿Cumple **KKT** (geom)? Sí

¿Cumple KKT (álg.)? No (multiplicadores < 0)

Los vectores gradiente activos **no forman un cono** que contenga $-\nabla f$, por eso algebraicamente no se pueden representar con multiplicadores positivos.

Ejercicio 152 (3,33 *puntos*)

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la linea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la linea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

I) *(4 puntos) Plantee el problema.*

II) *(4 puntos) Resuélvalo gráficamente.*

III) *(2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación.*

(Navarra - Matemáticas CCSS - Julio 2020)

Solución.

	Biocombustible T1	Biocombustible T1	Restricciones
Tiempo de proceso (h/ton)	3	1	≤ 90
Materia prima (ud/ton)	2	4	≤ 195
Precio venta (€/ton)	2000	1800	

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de biocuombustible T1 (toneladas/semana)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de biocuombustible T2 (toneladas/semana)”}$$

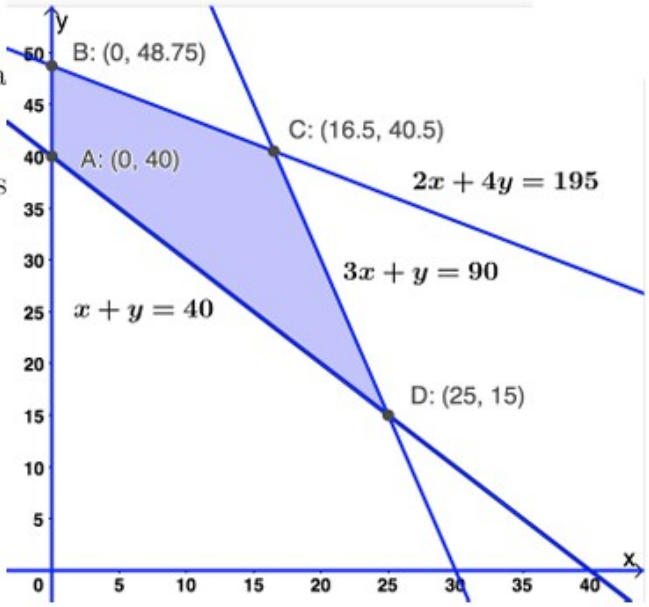
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 40 & \to (0,40) \quad \& \quad (40,0) \\ ② \; 3x + y \leq 90 & \to (0,22{,}5) \quad \& \quad (45,0) \\ ③ \; 2x + 4y \leq 195 & \to (0,195) \quad \& \quad (65,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2000x + 1800y$

SOLUCIÓ

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	40	72000
B	0	48,75	87750
C	16,5	40,5	105900
D	25	15	77000

El *beneficio máximo* es de 105900 €, y se obtiene produciendo 16,5 toneladas de biocombustible T1 y 40,5 de biocombustible T2.

III) Las restricciones se mantienen (y por tanto la región factible), mientras que la función objetivo pasa a ser el nivel de contaminación que se desea minimizar:

$$f(x, y) = 5x + 10y$$

Evaluamos la nueva función objetivo en los vértices de la región factible:

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	40	400
B	0	48,75	487,5
C	16,5	40,5	487,5
D	25	15	275

El *nivel de contaminación mínimo* es de 275 unidades y se consigue produciendo 25 toneladas de biocombustible T1 y 15 de biocombustible T2.

HTTPS://APRENEMICOMIGUELDN.COM

SOLUCIÓ

El **máximo beneficio de 105900 €**, **cumple el teorema de KKT** construyendo su sistema con multiplicadores.

Función objetivo (maximizar ingresos):

$$f(x,y)=2000x+1800y$$

Restricciones reescritas como $g_i(x,y)\leq 0$**:**

1. $g_1=40-x-y\leq 0$ **(** $\leftrightarrow x+y\geq 40$ **)**
2. $g_2=3x+y-90\leq 0$
3. $g_3=2x+4y-195\leq 0$
4. $g_4=-x\leq 0, g_5=-y\leq 0$

Paso 1: Gradientes

$$\nabla f=\begin{bmatrix}2000\\1800\end{bmatrix}$$

$$\nabla g_1=[-1-1], \nabla g_2=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, \nabla g_3=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

Paso 2: ¿Qué restricciones están activas en C= (16.5,40.5)?

Evaluamos:

- $x+y=57\Rightarrow g_1=40-57=-17$ ... **(No cumple)**
- $3x+y=49.5+40.5=90\Rightarrow g_2=0$ ... **(No cumple)**
- $2x+4y=33+162=195\Rightarrow g_3=0$ ... **(No cumple)**

Restricciones activas: **g_2** y **g_3**

Paso 3: Condición de estacionariedad

Sea:

- λ_2: multiplicador de g_2
- λ_3: multiplicador de g_3

KKT:

SOLUCIÓ

$$\nabla f + \lambda_2 \nabla g_2 + \lambda_3 \nabla g_3 = 0$$

Sustituimos:

$$\nabla f + \lambda_2 \nabla g_2 + \lambda_3 \nabla g_3 = 0$$
$$\begin{bmatrix} 2000 \\ 1800 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Sistema de ecuaciones

Componente x:

$$2000 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad \textbf{...(1)}$$

Componente y:

$$1800 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \quad \textbf{... (2)}$$

Paso 5: Resolver el sistema

De **(2)**:

$$\lambda_2 = -1800 - 4\lambda_3$$

Sustituimos en **(1)**:

$$2000 + 3(-1800 - 4\lambda_3) + 2\lambda_3 = 0$$
$$2000 - 5400 - 12\lambda_3 + 2\lambda_3 = 0$$
$$-3400 - 10\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -340$$

Ahora:

$$\lambda_2 = -1800 - 4(-340) = -1800 + 1360 = -440$$

Paso 6: Verificación de signos

Los multiplicadores deben ser **≥ 0** para restricciones activas:

- $\lambda_2 = -440$
- $\lambda_3 = -340$

SOLUCIÓ

Ambos negativos → **no se cumple KKT algebraicamente**

∴ Punto C (16.5, 40.5):

¿Óptimo? Sí (máximo)

¿Cumple Lagrange? No, hay desigualdades

¿Cumple **KKT** (geom)? Sí (vértice factible y óptimo)

¿Cumple KKT (¿álg?)? No (multiplicadores < 0)

Ejercicio 162 (2,5 *puntos*)

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar los ingresos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- *El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.*
- *Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.*
- *El material utilizado en cada mesa cuesta 4 € y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.*

	PRECIO	*MATERIAL*	*TIEMPO*	*UNIDADES*
MESA	20 €	4 €	2 *horas*	x
SILLA	30 €	2 €	3 *horas*	y

a) *(2.1 puntos) Plantea y resuelve el problema de maximización.*

b) *(0.4 puntos) Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviee a la empresa.*

(País Vasco - Matemáticas CCSS - Junio 2023 - Bloque Algebra)

HTTPS://APRENDEC...

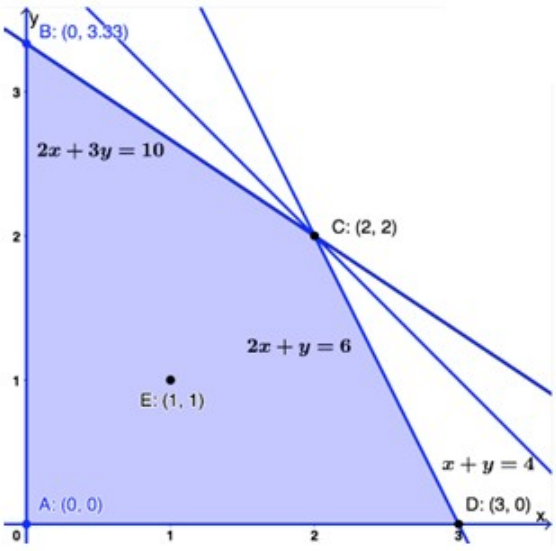
Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x+y \le 4 \\ ② \ 2x+3y \le 10 \\ ③ \ 4x+2y \le 12 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ x+y \le 4 & \to (0,4) \ \& \ (4,0) \\ ② \ 2x+3y \le 10 & \to (2,2) \ \& \ (5,0) \\ ③ \ 2x+y \le 6 & \to (0,6) \ \& \ (3,0) \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 20x + 30y$

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	$10/3$	100
C	2	2	100
D	3	0	60



Los *ingresos máximos* son de 100 € y se producen en cualquier punto de coordenadas enteras del segmento $\overline{BC}$. El único posible sería $C : (2,2)$, luego habría que vender 2 mesas y 2 sillas.
Es factible vender 1 mesa y 1 silla, pero el beneficio $f(1,1) = 50$ € sería menor.

SOLUCIÓ

El **punto C=(2,2)**, **cumple el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** construyendo el sistema con multiplicadores.

Maximizar ingresos: $f(x,y)=20x+30y$

Restricciones (formato $g_i(x,y)\leq 0$):

$$1.g_1=x+y-4\leq 0$$
$$2.g_2=2x+3y-10\leq 0$$
$$3.g_3=2x+y-6\leq 0$$

Paso 1: Gradientes

$$\nabla f=\begin{bmatrix}20\\30\end{bmatrix},\nabla g_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\nabla g_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\nabla g_3=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Paso 2: ¿Qué restricciones están activas en C=(2,2)?

- Si cumple $g_1=2+2-4=0$
- Si cumple $g_2=4+6-10=0$
- Si cumple $g_3=4+2-6=0$

$\therefore$ **Las tres restricciones están activas en C.**

Paso 3: Condición de estacionariedad

Sean:

- $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$: Multiplicadores de g_1,g_2,g_3

Sistema **KKT**:

$$\nabla f+\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2+\lambda_3\nabla g_3=0$$

$$\begin{bmatrix}20\\30\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Paso 4: Sistema de ecuaciones

Componente **X**: $20+\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0$ ....**(1)**

Componente **Y**: $30+\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0$ ....**(2)**

Paso 5: Resolver el sistema

Restamos (2) – (1): $(30+\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3)-(20+\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3)=0$

$$10+\lambda_2-\lambda_3=0\Rightarrow \lambda_2=\lambda_3-10 \text{ ...(3)}$$

SOLUCIÓ

Sustituimos (3) en (1): $20+\lambda_1+2(\lambda_3-10)+2\lambda_3=0$

$20+\lambda_1+2\lambda_3-20+2\lambda_3=0\Rightarrow \lambda_1+4\lambda_3=0\Rightarrow \lambda_1=-4\lambda_3$ … **(4)**

Sustituimos **(3)** y **(4)** en **(2)**:

$$30+(-4\lambda_3)+3(\lambda_3-10)+\lambda_3=0$$
$$30-4\lambda_3+3\lambda_3-30+\lambda_3=0\Rightarrow 0=0$$

Sistema consistente. Solución general:

$$\lambda_3=t$$
$$\lambda_2=t-10$$
$$\lambda_1=-4t$$

Paso 6: Verificación de signos

Para que se cumpla **KKT**, deben ser:

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0$$

Pero: $\lambda_3=t>0\Rightarrow \lambda_1=-4t<0$, $\lambda_2=t-10$

Siempre tendremos multiplicadores negativos **⇒ KKT no se cumple algebraicamente**

$\therefore$ Punto C (2, 2):

¿Óptimo? Sí (máximo)

¿Cumple Lagrange? No, hay desigualdades

¿Cumple **KKT** (geom)? (vértice factible y óptimo)

¿Cumple KKT (álg.)? No (multiplicadores < 0)